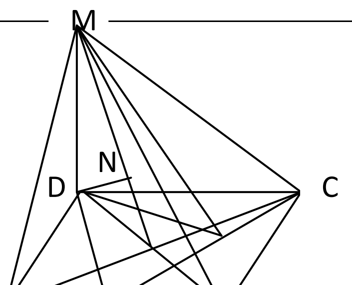
OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICA-etapa locala
18 februarie 2012

Soluții şi barem- clasa a VIII-a

1.	$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2\Rightarrow\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\lvert\sqrt{2}-1\rvert$ $3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}+1)^2\Rightarrow\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\lvert\sqrt{2}+1\rvert$ Relația din enunț se scrie: $\frac{a}{\lvert\sqrt{2}-1\rvert}-\frac{b}{\lvert\sqrt{2}+1\rvert}=\sqrt{2}$ adică $\frac{a}{\sqrt{2}-1}-\frac{b}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow a(\sqrt{2}+1)-b(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}\Leftrightarrow a\sqrt{2}+a-b\sqrt{2}+b-\sqrt{2}=0$ $\sqrt{2}(a-b-1)+(a+b)=0$ $\sqrt{2}$ este irațional $\Rightarrow a-b-1=0$ şi $a+b=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=1\\a+b=0\end{cases}$ $2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ şi $b=-\frac{1}{2}\in Q$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
2.	a) Transformăm echivalent inegalitatea astfel: $\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\le 1\Leftrightarrow\frac{2xy}{x+y}-1\le xy\Leftrightarrow\frac{2xy}{x+y}\le xy+1$ Folosind inegalitatea $m_h\le m_g\ \Rightarrow\ \frac{2xy}{x+y}\le\sqrt{xy}\le xy+1$, ultima inegalitate fiind evidentă. b) Din punctul a) $\Rightarrow\frac{2}{x+y}-1\le\frac{1}{xy}$ (*) .... Din $a+b+c=1\Rightarrow a=1-(b+c),\ b=1-(a+c),\ c=1-(a+b)$ Prelucrând fiecare termen din membru stâng şi ţinând cont de (*), obținem: $\frac{1+a}{b+c}=\frac{1+1-(b+c)}{b+c}=\frac{2}{b+c}-1\le\frac{1}{bc}$ $\frac{1+b}{c+a}=\frac{1+1-(c+a)}{c+a}=\frac{2}{c+a}-1\le\frac{1}{ca}$ $\frac{1+c}{a+b}=\frac{1+1-(a+b)}{a+b}=\frac{2}{a+b}-1\le\frac{1}{ab}$ Care adunate dau: $\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\le\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{abc}$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
3.	Desen	1p



Str. 1 Decembrie nr.5
420080, Bistrița, Jud B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

O

a) $\left.\begin{matrix} MD \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MD \perp AD \Rightarrow d(M,AD) = MD = 2a$

Analog $d(M,DC) = MD = 2a$ 1p

$\left.\begin{matrix} MD \perp (ABC) \\ DA \perp AB \\ DA, AB \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{T.3P} MA \perp AB \Rightarrow d(M,AB) = MA$

În ΔMAD avem $cu\ \ m(< MDA) = 90^0$

$\xRightarrow{T.Pitagora} MA^2 = MD^2 + AD^2 \Leftrightarrow MA^2 = 4a^2 + 5a^2 = 9a^2 \Rightarrow MA = 3a$ 1p

Analog *d*(M,BC)=MC=3a

b) $\left.\begin{matrix} ABCD - pătrat \\ AC \cap DB = \{O\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow DO \perp AC$

$\left.\begin{matrix} MD \perp (ABC) \\ DO \perp AC \\ DO, AC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{P.3P} MO \perp AC \Rightarrow d(M,AC) = MO$

În

$\Delta\ MDO, m(< MDO) = 90^0, MD = 2a \Rightarrow MO^2 = MD^2 + DO^2 \Rightarrow MO^2 = 4a^2 + \frac{10}{4}a^2 =$ 1p

$\Rightarrow MO = \frac{a\sqrt{26}}{2}$

$;DO = \frac{1}{2}DB = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$\left.\begin{matrix} AC \subset (MAC) \\ DO \perp AC \\ MO \perp AC \\ MO \subset (MAC) \\ DN \perp MO \end{matrix}\right\} \xRightarrow{R2T3} DN \perp (MAC)$

În $\Delta\ MDO - dreptunghic$ 1p

$$DN = \frac{DM \cdot DO}{MO} = 2a \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{26}} \Rightarrow DN = \frac{2a\sqrt{10}}{\sqrt{26}}$$

c) $\left.\begin{matrix} MD \perp (ABC) \\ DQ \perp EC \\ DO, EC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{T3P} MQ \perp EC$

Str. 1 Decembrie nr.5
420080, Bistrița, Jud B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

	Calculăm DQ scriind aria triunghiului DCE în două moduri $AE\|\|DC \Rightarrow d(A,DC)=d(E,DC)=AD=a\sqrt{5} \Rightarrow A_{DCE}=\frac{DC\cdot h}{2}=\frac{a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{5}}{2}=\frac{5a^2}{2}$ $DQ\perp CE \Rightarrow A_{DCE}=\frac{DQ\cdot CE}{2}$ (1) În triunghiul $\triangle$CBE dreptunghic în B $\Rightarrow CE^2=BC^2+EB^2 \Leftrightarrow CE^2=5a^2+\frac{5a^2}{4}=\frac{25a^2}{4} \Rightarrow CE=\frac{5a}{2}$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow \begin{cases} A_{DCE}=DQ\cdot\frac{5a}{2}\cdot\frac{1}{2}=5a\cdot\frac{DQ}{4} \\ dar\ A_{DCE}=\frac{5a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{5a\cdot DQ}{4}=\frac{5a^2}{2} \Rightarrow DQ=2a.$	1p
	În triunghiul $\triangle$MDQ dreptunghic în D avem $MQ^2=DM^2+DQ^2=4a^2+4a^2=8a^2 \Rightarrow MQ=2\sqrt{2}a$	1p